

特別研究報告

題目

フラクタル性に着目した脳機能ネットワークの接続構造の分析と
インターネットの高品質化への応用

指導教員

村田 正幸 教授

報告者

四條 能伸

2014年2月14日

大阪大学 基礎工学部 情報科学科

フラクタル性に着目した脳機能ネットワークの接続構造の分析とインターネットの高品質化への応用

四條 能伸

内容梗概

インターネットは世界最大規模の人工ネットワークであり、大規模複雑化するインターネットをより高品質なものにすることが望まれている。高品質化への手がかりは、多彩な機能を高度なレベルで発揮しているヒトの脳機能ネットワークに見出すことができる。ヒトの脳は非常に複雑でありながら少ない消費エネルギーで管理・制御されており、脳が機能を発揮するときの処理は他の生物と比較して高度に最適化されていることが明らかにされてきた。脳機能ネットワークの特性に関する研究として、トポロジー構造をグラフ理論にもとづいて解析することが広く行われており、インターネットには見られない脳機能ネットワークに固有の構造としてボクセルレベルのトポロジーにおいてフラクタル性を有していることが明らかにされている。したがって、脳機能ネットワークのフラクタル性を取り入れることでインターネットの高品質化が期待できる。ただし、そのためには脳機能ネットワークの接続構造とその構造によってもたらされる利点を解明しなければならない。そこで本報告では、脳機能ネットワークの構造的特徴としてフラクタル性に着目し、フラクタル性の要因となる接続構造およびその構造によってもたらされる利点を明らかにする。分析の結果、脳機能ネットワークは機能モジュールの接続性に関するフラクタル性を有しており、比較対象トポロジーと比べて5倍以上多くの良質な経路を確保していることがわかった。

主な用語

脳機能ネットワーク、フラクタル、インターネット、接続構造、AS レベルトポロジー

目次

1	はじめに	5
2	関連研究	7
2.1	ネットワークトポロジーにおけるフラクタル	7
2.2	脳機能ネットワーク	8
3	脳機能ネットワークの接続構造の分析	11
3.1	使用する脳機能ネットワークのデータ	11
3.2	分析方法	11
3.3	分析結果	15
4	脳機能ネットワークの性能評価	26
4.1	評価対象トポロジー	26
4.2	評価指標	28
4.3	評価結果	28
4.4	高品質インターネット構築に関する考察	31
5	おわりに	40
	謝辞	41
	参考文献	42

目 次

1	フラクタル図形の例	7
2	l_B と N_B の関係とフラクタル性	8
3	Louvain 法の動作概要	11
4	モジュール内部トポロジーのノード数	13
5	モジュール内部トポロジーのリンク数	13
6	モジュール集約トポロジーの N_B 対 l_B の分布	16
7	モジュール集約トポロジーの次数分布	17
8	モジュール内部トポロジーの次数分布	17
9	モジュール集約トポロジーの次数相関	19
10	モジュール内部トポロジーの次数相関	20
11	モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関	22
12	モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関	23
13	脳機能ネットワークトポロジーの概略図	24
14	リンクの張替えの割合 p に対するクラスタリング係数と平均ホップ長 : WS モデル	29
15	性能評価に使用するトポロジーの例 (ノード数:432、リンク数:654)	30
16	上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path1	32
17	全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path1	33
18	上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path2	34
19	全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path2	35
20	上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path3	36
21	全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path3	37
22	上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path4	38
23	全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path4	39

表 目 次

1	各階層のノード数とリンク数、およびモジュール度	13
2	N_B 対 l_B のべき関数 $f(x) = ax^{-D_B}$ に対する近似の結果	16
3	モジュール集約トポロジーの次数相関	18
4	ホップ長が $H_B(0)$ から $H_B(300)$ の範囲内である経路数の比較	31

1 はじめに

インターネットは、ISP (Internet Service Provider、インターネットサービスプロバイダー)、学術系ネットワーク、データセンターなどの多数の AS (Autonomous System、自律システム) が相互に接続することにより構成される世界最大規模の人工ネットワークである [1]。近年、スマートフォンやタブレット端末等の普及や、動画共有サイトなどのソーシャルメディアサービスの普及により、インターネットにおける通信需要や接続端末数は増加している。また、インターネットを利用したショッピングシステム、トレーディングシステム、バンキングシステムなどが次々に登場することで、「社会インフラ」として果たす役割も年々大きくなっており、もはや我々の生活に欠かすことのできないものとなった。その重要性から、インターネットをより高品質なものにすることが望まれている。

高品質化の手段として、伝送技術や処理技術などの技術発展によるものや、新たなサービス・アプリケーション技術によるものなどが考えられる。しかし、新技術の導入のためには既存技術との共存が必要不可欠であるためインターネット上で展開される技術の多様化をもたらし、その結果、管理面での複雑化を招く。インターネットでは全体を管理・制御することではなく、AS が自律的に動作することで規模に関する問題はある程度回避できている。しかしながら、AS はインターネット全体の構造を考えずに利己的に接続関係を構築するため、例えば近年では HyperGiant と呼ばれる一部の AS に非常に多くのトラフィックが集中していることが明らかになっている。そのためインターネットがより脆弱なものになっている。このような背景から、高品質なインターネットを構築するための新たなアプローチが必要である。

大規模化・複雑化するインターネットの高品質化への手がかりは、ヒトの脳機能ネットワークに見出すことができる。ヒトの脳は知覚、運動、認知、コミュニケーションと多彩な機能を発揮している [2]。このような機能は生まれながらにして持ち合わせたものではなく、ヒトが成長する過程において学習することで習得している。ヒトの脳は非常に複雑でありながら、成長の段階に応じてネットワークが最適化されることで、少ない消費エネルギーで管理・制御されていることがわかっている [3,4]。また、脳が機能を発揮するときの処理は他の生物と比較して高度に最適化されていることが明らかにされているため [5-7]、ヒトの脳機能ネットワークの特性の一部をネットワークの設計・制御に取り入れることで、インターネットもしくは情報ネットワークシステムの高品質化が期待される。

脳機能ネットワークの特性に関する研究として、近年では fMRI (functional Magnetic Resonance Imaging, 機能的核磁気共鳴画像法) などの計測技術を用いることで脳機能ネットワークの構造を反映するトポロジーを生成し、得られたトポロジーをグラフ理論にもとづいて解析することが広く行われている。それらの研究成果として、ボクセルレベルのトポ

ロジーにおいて、ノードの次数分布がべき則に従うこと、ネットワークの規模に対してノード間の平均ホップ長が小さくなるスモールワールド性を有すること、ノード間が局所的に密に連結されるモジュール構造、およびモジュールが階層的に連結される階層モジュール構造を有していることなどが明らかにされた。また、機能モジュールが各々の役割を果たすために十分独立しており、かつ円滑な情報処理のために機能モジュール間が十分接続されるという関係を満たすために、トポロジーがフラクタル性を有していることも明らかになってきた [4,8-13]。

インターネットの AS レベルトポロジーは、次数分布がべき則に従う点 [14]、スモールワールド性を有する点 [15] において、脳機能ネットワークと特徴を共有している。一方で、階層モジュール構造およびフラクタル性を有していないことが明らかにされており、この点については脳機能ネットワークと異なる [16]。したがって、脳機能ネットワークの階層モジュール構造やフラクタル性を取り入れることでインターネットの高品質化が期待できる。ただし、そのためには脳機能ネットワークの接続構造とその構造によってもたらされる利点を解明しなければならない。そこで本報告では、脳機能ネットワークの構造的特徴としてフラクタル性に着目し、フラクタル性の要因となる接続構造およびその構造によってもたらされる利点を明らかにする。脳機能ネットワークは階層モジュール構造も有するが、フラクタル性に着目するのは階層モジュール構造と密接に関連しているためである [10]。

本報告の構成として、まず 2 章では関連研究を述べる。次に 3 章で脳機能ネットワークの接続構造の分析を行い、4 章で機能間の接続構造が有する性能についてインターネットへの応用の観点から評価を行う。最後に、本報告のまとめと今後の課題について述べる。

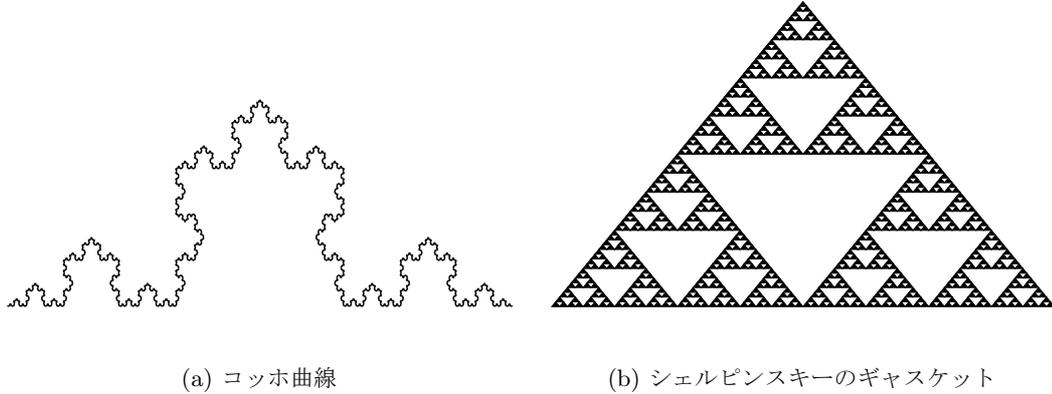


図 1: フラクタル図形の例

2 関連研究

2.1 ネットワークトポロジーにおけるフラクタル

文献 [17] では、様々な複雑ネットワークがトポロジーの観点でフラクタル性を有していることが述べられている。フラクタル性は幾何学の分野で導入された概念であり、図 1 のように図形の一部と全体の関係が自己相似となっている性質を表す。フラクタル性を解析する上で重要な指標となるのが、フラクタル次元 D である。 D が非整数な有限値になるとき、その図形はフラクタルであると定義される [18]。例えば、図 1(a) のコッホ曲線は $D = \log 4 / \log 3 \approx 1.262$ となる。

ネットワークトポロジーにおけるフラクタル性も、フラクタル次元によって定義される。フラクタル次元を算出する方法は複数存在する。文献 [17] ではボックスカウント法と呼ばれる方法を使用している。ボックスカウント法では、ネットワークの全ノードをホップ長 l_B 未満で到達可能な集合 (ボックス) に分割する際に必要となる最小限の集合数 $N_B(l_B)$ を考える。その時、フラクタル次元 D_B は以下の式 (1) によって導かれる。

$$N_B(l_B)/N \sim l_B^{D_B} \quad (1)$$

式 (1) において N はネットワークのノード数である。フラクタル性を有するトポロジーでは、図 2 のように l_B と N_B の間にべき則の関係性が認められる。一方でフラクタル性がないトポロジーは、 l_B の増加に対して N_B が指数的に減少する。

フラクタル性を有するトポロジーの構造的特徴に関する研究は、これまでにいくつか行われている。文献 [16] では、次数が低いノードと次数が高いノードとの間に優先的にリンクを構築することで得られる反次数相関の関係にある場合、トポロジーがフラクタル性を有することを示している。文献 [19] では、トポロジーのフラクタル性は、そのトポロジーに対

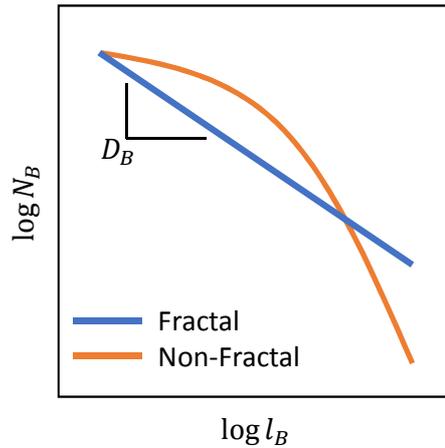


図 2: l_B と N_B の関係とフラクタル性

応する“Skeleton”と呼ばれる木構造におけるフラクタル性に由来することが述べられている。Skeleton は与えられたノード集合に対して betweenness centrality が最大となるようにリンクを構築することで得られる木構造である。しかしながら、その構造と文献 [16] で述べられている反次数相関との関連性は明らかになっていない。このように、トポロジーがフラクタル性を有する要因を容易に特定することはできない。

フラクタル性を有するトポロジーの性質に関する考察も行われている。文献 [16] では、フラクタル性を有するトポロジーではハブとなるノード同士が直接接続されていないため、ハブ故障に対してロバストであることが述べられている。また文献 [19] では、システムの冗長性と関連があると述べられている。

2.2 脳機能ネットワーク

2.2.1 概要

脳のネットワークは、構造ネットワークと機能ネットワークに大別できる。構造ネットワークは神経細胞をノード、軸索投影やシナプス結合をリンクとみなしたネットワークであり、機能ネットワークは脳の機能をノード、機能間の相互作用をリンクとみなしたネットワークである。構造ネットワークは基礎的な脳のアーキテクチャを理解するために有益であるが、脳に固有の概念が多いことから他分野への応用が難しい。一方で、ヒトの高度な情報処理を直接的に支えているのは機能ネットワークにおけるダイナミクスであり、その構造や制御様式は脳に固有の概念ではない。そのため脳機能ネットワークを解析し構造や制御様式を明らかにすることで、幅広い分野への応用することが可能となる。

脳機能ネットワークの解析はグラフ理論にもとづいて行われることが一般的である。グラフ理論による解析を行うために、脳機能の観測データからトポロジーを生成する方法が確立されている。またグラフ理論を用いた解析から、脳機能ネットワークは高いモジュール性および階層モジュール構造を有していることや、フラクタル性を示すことが明らかになってきている。以降では、脳機能ネットワークのトポロジー生成方法およびモジュール性、フラクタル性について詳細に言及する。

2.2.2 脳機能ネットワークトポロジーの生成方法

文献 [20] では、fMRI を用いた観測による脳機能ネットワークトポロジーの生成方法を 3 つのステップに分けて説明している。以下で各ステップの詳細を記述する。

ステップ 1：計測点の決定 fMRI による計測を行う脳の部位と計測点の数を決める。計測点はボクセル (Voxel) と呼ばれ、ボクセル数が多いほどより細かい粒度で計測結果を取得することができる。トポロジーの観点では、ボクセルはノードに相当する。

ステップ 2：BOLD 信号の相関マトリクスの取得 fMRI は、ヘモグロビンの酸素化の違いを検出することにより BOLD (Blood Oxygen Level-Dependent) 信号と呼ばれる値を計測し、その時系列データを取得することができる技術である。時系列データをある範囲で区切ることで、ある時間帯におけるボクセル間の BOLD 信号の相関係数を算出することができる。そこで全ボクセル間について相関係数を算出することで、ボクセル数×ボクセル数の相関マトリクスを取得できる。

ステップ 3：相関係数の閾値を利用したリンクの抽出 ボクセル間の BOLD 信号の相関係数は、ある時間帯においてどの程度相互作用を及ぼしあっていたかを示す指標となる。よってトポロジーの観点では、高い相関係数を示すボクセル間にリンクが存在するとみなすことができる。そこで相関係数の閾値を指定し、その閾値以上の相関係数となるボクセルペアを抽出することで、トポロジーのリンクを抽出できる。

得られるトポロジーは、ステップ 3 における閾値に大きく影響される。また、閾値によっては非連結なトポロジーが生成される可能性があるが、その場合は最も大きな連結成分を解析対象とみなすことが多い。

2.2.3 モジュール性と階層モジュール構造

文献 [10–12, 21] では、脳機能ネットワークが高いモジュール性、および階層モジュール構造を有していることを述べている。脳科学的には、互いに近い距離にある神経細胞が密接

に通信を行うことで脳の1つの小さな機能を提供していることから、高いモジュール性を示すことが説明されている。また、それら小さな機能同士が互いに通信を行うことでより大きな機能を提供しており、脳全体としていくつかの機能レベルに分割することができることから、階層モジュール構造を有していることが説明できる。

文献 [21] では、グラフ理論の観点においても脳が高いモジュール性、階層モジュール構造を有していることを述べている。グラフ理論では、以下の式 (2) で定義されるモジュール度 Q を最大にするモジュール分割 P を与えた時、 Q の値が 1 に近いほどモジュール性が高いと定義する。

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{C \in P} \sum_{i,j \in C} \left[A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \quad (2)$$

式 (2) において、 A はグラフの隣接行列、 m はグラフのリンク数、 k_i は頂点 i の次数を示す。他のモジュールに属するノードへのリンク数に比べて、同じモジュールに属するノードへのリンク数が多いほど、高いモジュール度となる。

Q を最大にする P を求めるアルゴリズムはモジュール分割アルゴリズムと呼ばれるが、その多くがただ 1 つの P を求めるアルゴリズムであり、階層モジュール構造を検出できない。そこで、文献 [21] では Louvain 法 [22] と呼ばれるモジュール分割アルゴリズムを使用して、階層モジュール構造を検出している。Louvain 法は、貪欲法によるモジュール度の局所的な最適化を繰り返し行うことで、ある階層におけるモジュール分割を求める (Phase1)。そして、ある階層で得られたモジュールを 1 つの頂点とみなし (Phase2)、さらに局所的な最適化を行うことで 1 つ上の階層のモジュール分割を求める。この操作をモジュール度に改善が見られなくなるまで繰り返すことで、階層モジュール構造を検出することができる。アルゴリズムの概要を図で表現したものが図 3 である。各階層の Phase1 終了時点で得られたモジュール分割を $Path_n$ のモジュール分割と呼び、モジュール分割を行う前のグラフを $Path_0$ とする。文献 [21] では、被験者 18 人の脳機能ネットワークに対して Louvain 法を適用したところ、最も高い階層においてモジュール度の平均値が 0.604 と高い値となり、かつ階層的なモジュール構造が検出されたことを報告している。

2.2.4 フラクタル性

脳機能ネットワークのフラクタル性は、階層モジュール構造と深い関係があることが述べられている [10]。文献 [13] では、ボクセルレベルの脳機能ネットワークに対して式 (1) を利用したフラクタル性の解析を行ったところ、16 人の被験者のフラクタル次元 D_B が 1.9 ± 0.1 となり、いずれもフラクタル性が認められたことを報告している。

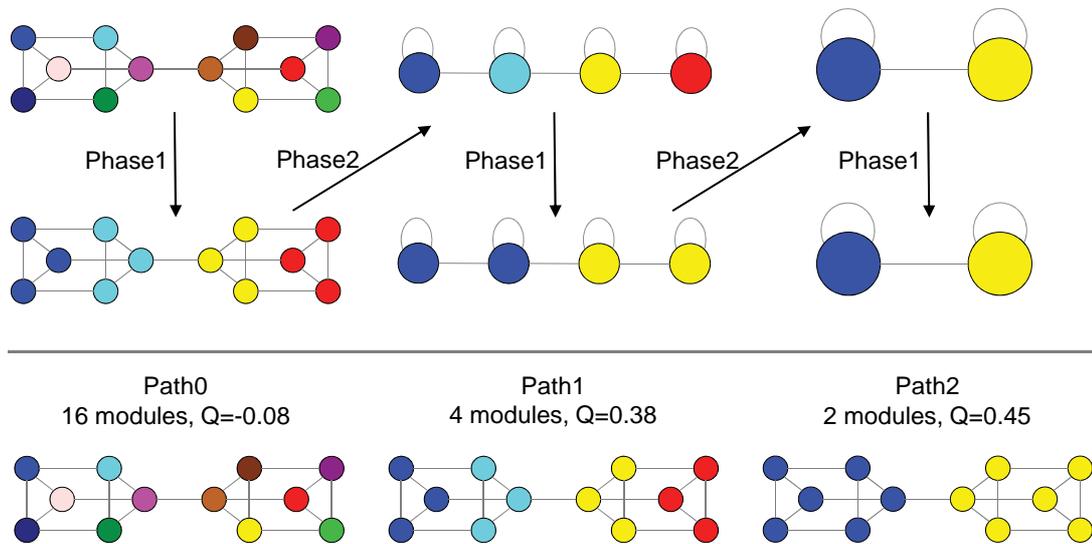


図 3: Louvain 法の動作概要

3 脳機能ネットワークの接続構造の分析

本章では、脳機能ネットワークの接続構造の分析方法およびその結果について述べる。まず、分析に用いた脳機能ネットワークのデータについて説明する。次に接続構造の分析に使用するトポロジーや指標について具体的な説明を行う。最後に、分析指標にもとづいて得られた分析結果、および分析結果のまとめとしてトポロジーの概略図を示す。

3.1 使用する脳機能ネットワークのデータ

安静状態にある健康な被験者の脳活動の様子を fMRI を用いて観測することで得られた実測データを使用する。被験者は 1 人で、計測は 80130 個のボクセルに対して行った。実測データからトポロジーを生成する際には、2.2.2 章に示した方法を利用した。生成されるトポロジーの規模を考慮し、相関係数の閾値を 0.95 に設定した。これによりボクセルレベルのトポロジーが抽出される。得られたボクセルレベルトポロジーのノード数とリンク数はそれぞれ 11420、44049 である。

3.2 分析方法

3.1 章で得られた脳機能ネットワークを対象に分析を行う。分析では、脳機能ネットワークのフラクタル性および階層モジュール構造に着目し、様々な粒度におけるトポロジーで分析を行う。分析に用いる指標は、どのようなノード間にリンクが構築されているか着目する

ために、ノードとリンクの相関を明らかにできるような指標を使用する。以下で詳細を述べる。

3.2.1 粒度の異なるトポロジーの生成方法

トポロジーの集約による様々な粒度のトポロジーの生成方法は、フラクタル性を利用した相似縮小によって行われ、一般的にはボックスカウント法におけるボックスサイズ l_B を変更することで行われる。しかし、 l_B はフラクタル次元を定義するためだけに使用される指標であり、その値自体や、その値から得られたトポロジーに意義を見出すことは難しい。そこで本報告では、フラクタル性と密接に関係している脳機能ネットワークの階層モジュール構造を利用し、各階層における各モジュールを上位層の1ノードに集約する事によりトポロジーを集約し、様々な粒度のトポロジーを得る。

このような方法を取る利点として、脳機能ネットワークの「機能」により深く着目できる点が挙げられる。ボクセルレベルトポロジーにおけるボクセル1つ1つはfMRIの計測点であり、直接的に機能を提供しているわけではない。そこでモジュールによる集約を行うことで、モジュール1つを機能の単位として見なすことが可能となる。その結果モジュールレベルにおけるトポロジーを分析することによって脳機能ネットワークの本質である「機能」に着目した分析が可能となる。

3.2.2 分析に用いるトポロジー

各階層のトポロジーと、各階層のモジュール内部の構造に着目し、それらの接続構造を分析する。

各階層のトポロジーは、Louvain法で得られる階層 Path k においてノード i が属するモジュール $M_i(k)$ を用いて、以下のアルゴリズムにもとづいて生成する。

1. 初期化として、ノード数がモジュール数に等しいトポロジーを生成する。この時点でトポロジーのリンク数は0である。
2. ボクセルレベルトポロジーにおいてノード (i, j) 間にリンクが存在し、かつ $(M_i(k), M_j(k))$ 間にリンクが存在しない時に、 $(M_i(k), M_j(k))$ 間にリンクを構築する。

上記のアルゴリズムで生成されるトポロジーは、ボクセルレベルトポロジーにおいてモジュール間に複数本のリンクが存在していた場合でも、それらをまとめて1本のリンクとみなす。これは、機能単位での接続構造に着目するためである。上記アルゴリズムを用いて生成した各階層のノード数とリンク数、および各階層のモジュール分割におけるモジュール度を表1に示す。

表 1: 各階層のノード数とリンク数、およびモジュール度

PATH (階層)	ノード数	リンク数	モジュール度
1	1989	3007	0.697
2	432	654	0.801
3	179	288	0.810
4	146	236	0.811

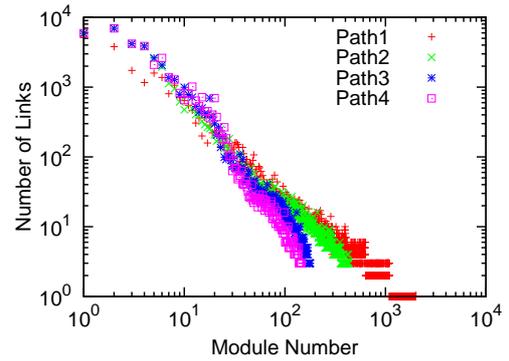
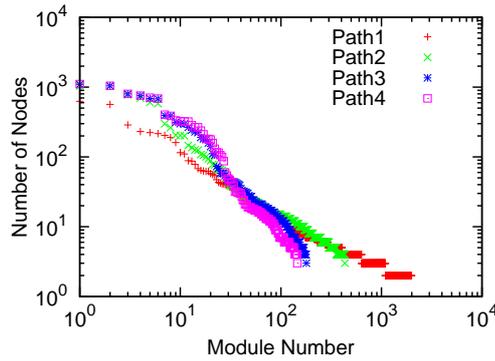


図 4: モジュール内部トポロジーのノード数 図 5: モジュール内部トポロジーのリンク数

各階層のモジュール内部は、Louvain 法の各 Path において同じモジュールに属するノードによって構成される。モジュール内のリンクは、全ノードペアのうちボクセルレベルトポロジーにおいてリンクが存在しているノードペアに構築される。モジュールの識別子 $M_i(k)$ を、モジュール内部のノード数が多い順に整数で 1 から順に割り当てた場合、各 Path におけるモジュール内部トポロジーのノード数とリンク数はそれぞれ図 4、図 5 のようになる。

本報告では以後、モジュールによる集約を行ったトポロジーをモジュール集約トポロジーと呼び、階層を指定する場合には Path n のモジュール集約トポロジーと呼ぶ。また、Path n のモジュール内のノードとリンクの接続構造を Path n のモジュール内部トポロジーと呼ぶ。

3.2.3 分析に用いる指標

分析に用いる指標について説明する。

フラクタル次元

ボックスカウント法を使用することで式 (1) にもとづいてフラクタル次元を算出し、フラクタル性の判定を行う。ボックスカウント法は、文献 [23] で述べられているグラフ色付け問題に帰着させる手法を使用する。モジュール内部トポロジーについては、対象となるトポロ

ジーの数が非常に多く、またモジュールによっては十分なノード数を有しておらずフラクタル次元を算出することが難しいものがあるために、フラクタル次元の算出は行わない。

次数分布

次数が k となるノードの出現確率 $P(k)$ を算出し、その確率分布を求める。

次数相関

リンクを構築しているノードペアの次数の相関を求める。次数相関の算出には、文献 [16] と文献 [24] の 2 つの方法を使用する。文献 [16] の方法は詳細な分析を行うことが可能である一方で、対象トポロジーの規模が小さすぎる場合は適用が難しく、また結果が単一の値ではなく分布として得られるために、多数のトポロジーを同等に比較解析する場合には適さない。そこで、文献 [16] の方法はモジュール集約トポロジーに対してのみ使用する。それぞれの方法の詳細を以下に述べる。

文献 [16] の方法 トポロジー T の次数相関 $R(k_1, k_2)$ は、式 (3) で定義される。

$$R(k_1, k_2) = \frac{P(k_1, k_2)}{P_r(k_1, k_2)} \quad (3)$$

$P(k_1, k_2)$ はノード次数 (k_1, k_2) 間にリンクが存在する確率、 $P_r(k_1, k_2)$ は、 T の次数分布を維持するようにランダムにリンクの張替えを行ったトポロジー T_r に対する同様の確率を示している。

式 (3) はランダムトポロジーと比べて、どのノード次数ペアの間にリンクが多く (もしくは少なく) 存在するか判別可能な指標である。具体的に、 $R(k_1, k_2)$ の値が 1 より大きな時は、次数が (k_1, k_2) となるノード間にランダムトポロジーより多くのリンクが存在することを示す。

文献 [24] の方法 次数列 w が (w_1, \dots, w_n) であるグラフ $G = (V, E)$ に対して以下の式 (4) で定義される。

$$L(G) = \sum_{(i,j) \in E(G)} w_i w_j \quad (4)$$

トポロジーのノード数とリンク数が同じ場合、 $L(G)$ の値が大きければ次数が大きいノード同士、次数が小さいノード同士が優先的に接続されていることを意味する。逆に、 $L(G)$ の値が小さい時は、次数が大きいノードと次数が小さいノードが優先的に接続されていることを意味する。

$L(G)$ はトポロジーのリンク数に依存するため、リンク数が異なるトポロジー間で比較を行うためには正規化された指標を利用する必要がある。そこで、分析には以下の式 (5) で定義される正規化指標を使用する。

$$l(G) = \frac{L(G) - L_{\min}}{L_{\max} - L_{\min}} \quad (5)$$

ここで、 $L_{\max}(L_{\min})$ は、 G と同じ次数列、頂点集合 V を持つグラフ G' における $L(G')$ の最大値 (最小値) である。 $l(G)$ は 0 から 1 の値となり、1 に近いほど次数が高いノード同士、次数が低いノード同士が優先的に接続されていることを意味する。

モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関

モジュール間を接続するリンクが、どのようなサイズのモジュール間に存在しているのか求める。モジュールのサイズは、対応するモジュール内部トポロジーのノード数が多いほど大きいものとする。

モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関

モジュール間を接続するリンクが、どのような次数を持つノードペアで構築されているのか求める。ノードの次数は、ボクセルレベルトポロジーにおける次数ではなく、モジュール内部トポロジーにおける次数とする。例えば、あるノードからモジュール内部へ向かうリンクが N_{in} 本、モジュール外部へ向かうリンクが N_{out} 本存在した時、ボクセルレベルトポロジーにおけるノードの次数は $N_{in} + N_{out}$ であり、モジュール内部トポロジーにおける次数は N_{in} である。

3.3 分析結果

3.2 章で述べた分析方法にもとづいて行った分析の結果を示す。なお以降では Path ごとにモジュールの識別子をモジュール内部のノード数が多い順に整数で 1 から割り当てている。

3.3.1 フラクタル次元

モジュール集約トポロジーに対してボックスカウント法を適用することで得られた N_B 対 l_B の分布を図 6 に示す。図 6 から、いずれの Path においても N_B と l_B の間にべき則の関係が見られる。式 (1) にもとづいてフラクタル次元を算出するために、 N_B 対 l_B の分布をべき関数 $f(x) = ax^{-D_B}$ に対して近似を行った時の結果を表 2 に示す。いずれの Path においても高い決定係数となっており、またフラクタル次元 D_B が非整数値になっていることから、モジュール集約トポロジーはフラクタル性を有していることが言える。これにより、脳機能

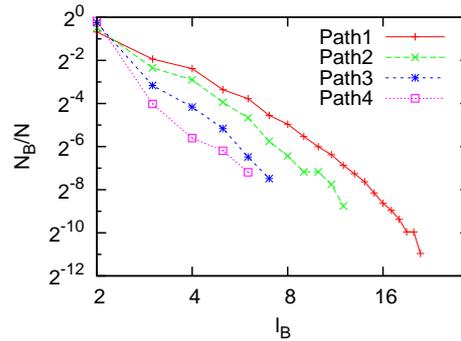


図 6: モジュール集約トポロジーの N_B 対 l_B の分布

表 2: N_B 対 l_B のべき関数 $f(x) = ax^{-D_B}$ に対する近似の結果

PATH	フラクタル次元 (D_B)	a	決定係数
1	2.028	2.55	0.9943
2	2.797	4.908	0.9950
3	4.665	21.23	0.9980
4	6.433	76.9	0.9995

ネットワークはボクセルレベルトポロジーだけでなく、機能モジュールの単位においてもフラクタル性を有していることが明らかになった。

3.3.2 次数分布

モジュール集約トポロジーの次数分布を図 7 に、モジュール内部トポロジーの次数分布を図 8 に示した。モジュール内部トポロジーは非常に数が多いため、代表してモジュール番号が 1,2,4,8,16 となるトポロジーを示している。図から、いずれのトポロジーにおいても次数分布がべき則に従っていることがわかる。図 8 に示してあるトポロジー以外のモジュール内部トポロジーのうち次数分布の形を捉えるために十分な数のノードを有しているものについても、同様に次数分布がべき則に従っていた。

3.3.3 次数相関

まず文献 [16] の方法で得られた結果を示し、次に文献 [24] の方法で得られた結果を示す。

文献 [16] の方法で得られた結果 図 9 に各 Path におけるモジュール集約トポロジーの次数相関を示す。横軸、縦軸はそれぞれリンクの両端のノードの次数を表しており、図中の点

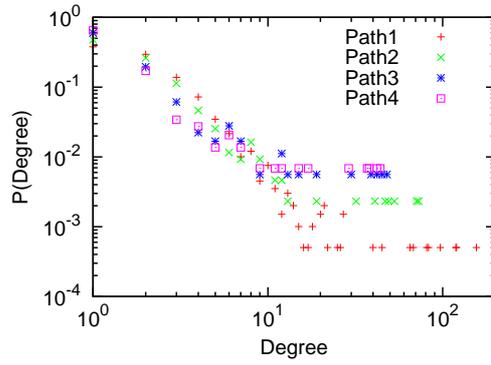
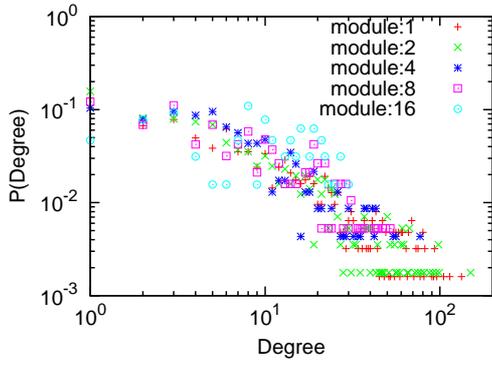
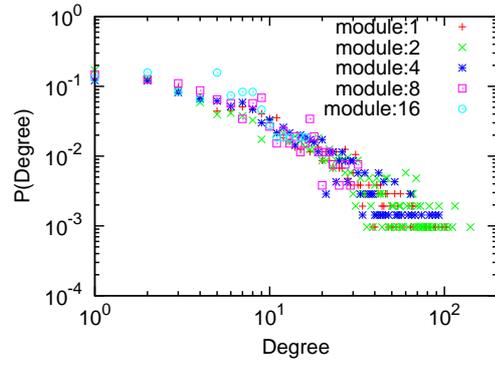


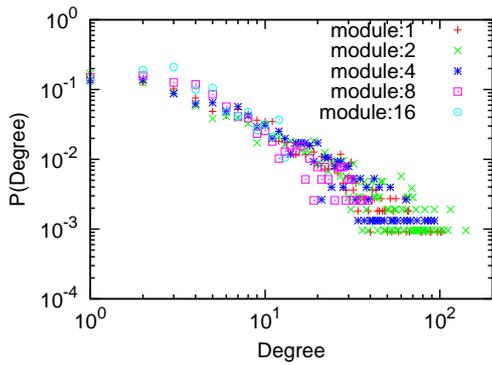
図 7: モジュール集約トポロジーの次数分布



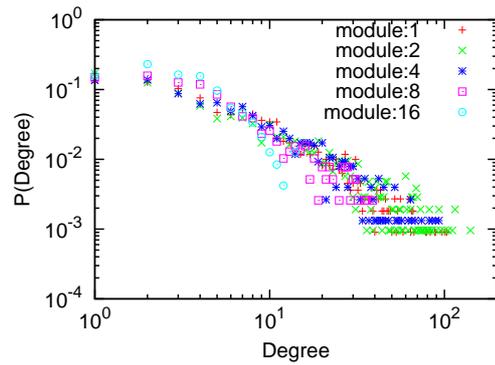
(a) Path1



(b) Path2



(c) Path3



(d) Path4

図 8: モジュール内部トポロジーの次数分布

表 3: モジュール集約トポロジーの次数相関

PATH	次数相関
1	0.4128
2	0.5611
3	0.6243
4	0.6109

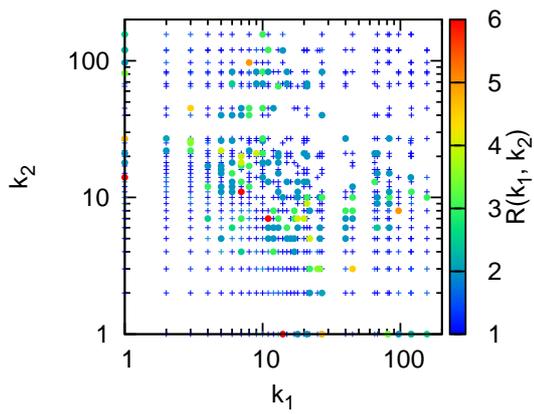
は式 (3) の $R(k_1, k_2)$ を示している。 $R(k_1, k_2)$ の点の色は値の大小を表しており、値が大きいほど赤く、値が小さいほど青い。また、 $R(k_1, k_2)$ の値が 2 以上となる点は、他の点よりも強調して示している。図 9 から、 (k_1, k_2) の値が共に小さい場合、もしくはどちらかが大きくどちらかが小さい場合に $R(k_1, k_2)$ の値が大きくなっていることがわかる。これは、対応するランダムトポロジーと比較した時にモジュール集約トポロジーに反次数相関の関係が認められることを意味する。

文献 [24] の方法で得られた結果 図 10 にそれぞれの Path におけるモジュール内部トポロジーの結果を示した。横軸はモジュール番号、縦軸は次数相関 $l(G)$ であり、対応するモジュール番号の次数相関をプロットしてある。ノード数が少ないものの中には式 (4) 中の L_{\max} と L_{\min} が等しくなり $l(G)$ が定義できないものが存在するが、それらは図 10 には反映していない。図より、モジュール番号が小さい部分、つまりノード数が多いモジュール内部トポロジーの次数相関が高いことがわかる。ノード数が 100 以上となるモジュールの次数相関の平均値は、 0.720 ± 0.015 であった。一方でモジュール番号が大きい部分では分布のばらつきが大きく、一貫した性質を見出すことができない。これは、ノード数が少ない場合はリンクの接続方法の組み合わせが少なくなり、多少のリンク接続方法の違いが $l(G)$ に大きく反映されるためである。そのため、モジュール番号が大きい部分の結果は考慮に値しない。

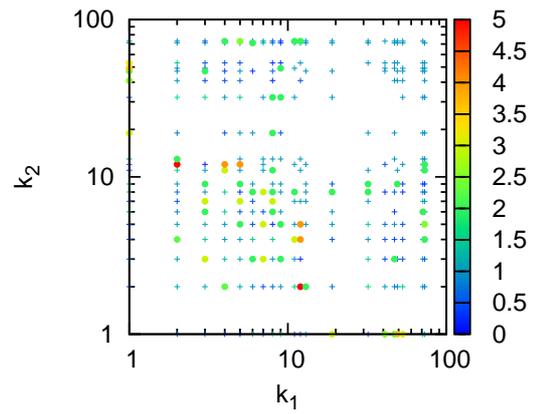
表 3 にモジュール集約トポロジーの結果を示した。いずれもモジュール内部トポロジーと比べて小さい値になっており、反次数相関の関係が認められる点で文献 [16] の方法で得られた結果に一致する。

3.3.4 モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関

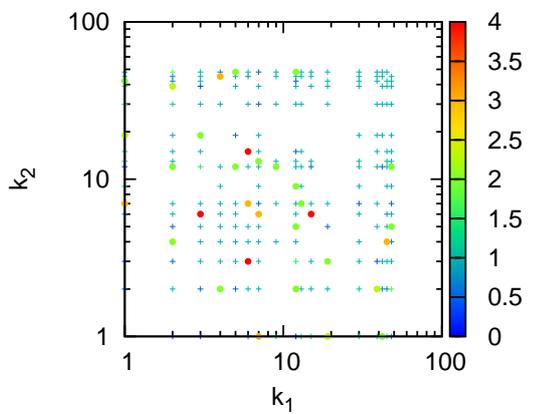
図 11 に、モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関を示す。図の横軸、縦軸ともにモジュール番号となっており、図中の点はモジュール間のリンクの総数を示している。図から、いずれの Path においても大きなモジュールは様々な大きさのモジュールと多数のリンクを構築していることが見て取れる。また、小さなモジュールは他のモジュールと構築する



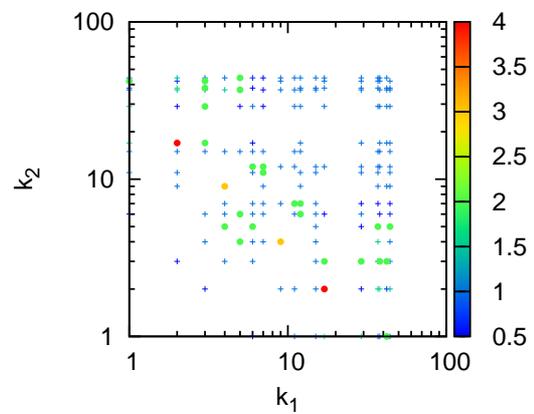
(a) Path1



(b) Path2

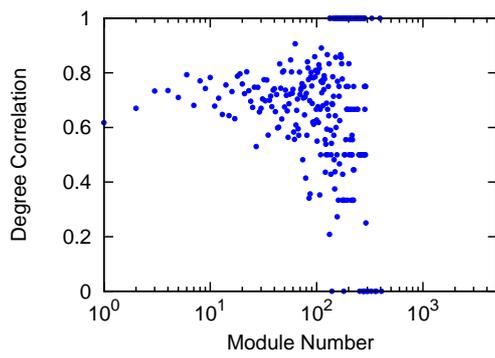


(c) Path3

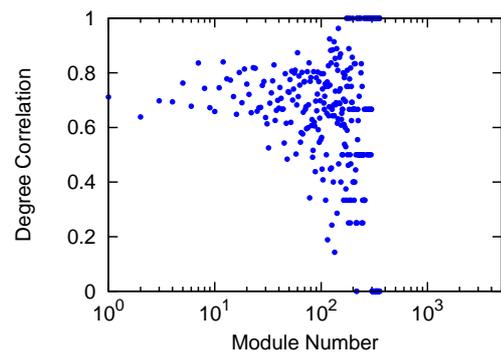


(d) Path4

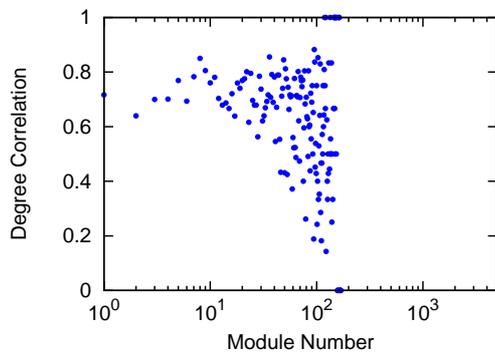
図 9: モジュール集約トポロジーの次数相関



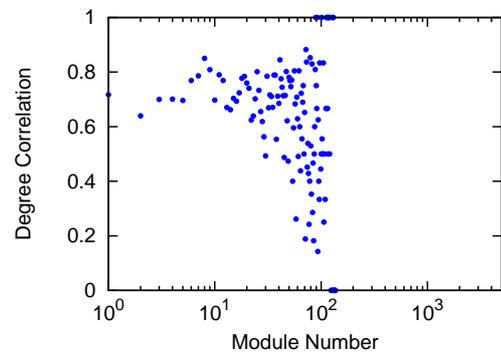
(a) Path1



(b) Path2



(c) Path3



(d) Path4

図 10: モジュール内部トポロジーの次数相関

リンクの本数が少なく、大きなモジュールと優先的にリンクを構築していることがわかる。

Path ごとの相関に着目すると、Path1 や Path2 では小さなモジュールが大きなモジュールを含めた様々な大きさのモジュールとリンクを構築していることがわかる。

モジュール単位に着目すると、大きなモジュールは次数が高く、小さなモジュールは次数が低いことが理解できる。つまり、小さなモジュールが大きなモジュールと優先的にリンクを構築している点に反次数相関の性質を見出すことができる。

3.3.5 モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関

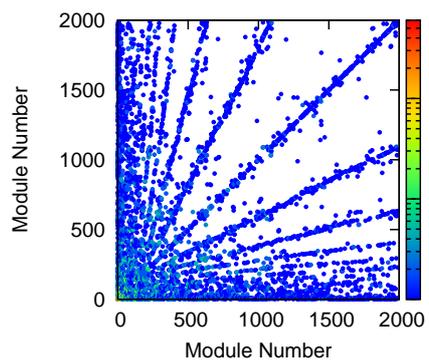
図 12 に、モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関を示す。図の横軸、縦軸ともに、モジュール間を接続するノードの次数をそのノードが属するモジュール内部トポロジーの平均次数で割った値となっている。これは、2つのモジュールを接続するノードの次数が共に D であっても、モジュール内部トポロジーの平均次数が異なればそれぞれのモジュールにおける次数 D の意味合いも異なるためである。平均次数で割ることで、異なるモジュールにおける同じ次数 D の意味合いの違いを吸収することができる。

図 12 を見ると、いずれの Path においても横軸、縦軸ともに 1 に近い値となる部分にリンクが集中していることがわかる。これは、各モジュール内部の平均的な次数を持つノードがモジュール間リンクの構築に大きく寄与していることを意味している。

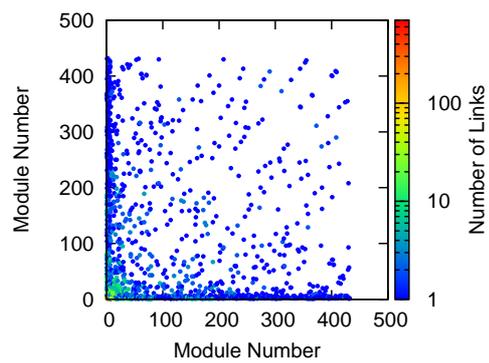
3.3.6 脳機能ネットワークトポロジーの概略図

分析の結果得られた知見をともに脳機能ネットワークトポロジーの概略図を作成した。作成した概略図を図 13 に示す。階層モジュール構造を反映するため Path ごとにトポロジーを示しているが、Path3 のトポロジーは Path4 のトポロジーと性質が似ているため省略している。

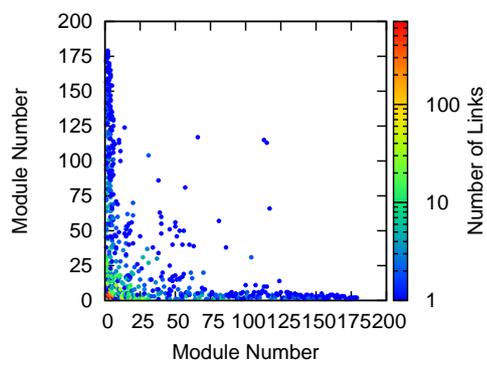
図中の大きな丸はモジュール、大きな丸の中にある小さな丸はモジュール内部のノード、つまりボクセルレベルトポロジーにおけるノードを表している。モジュールを表す丸の大きさはモジュール内部のノード数を反映しており、丸が大きいほどノード数が多い。赤く色付けされているモジュール内部のノードは、各モジュールにおける次数が高いハブノードを示している。モジュール間を結ぶ線はモジュール間リンクであり、線の太さはリンクの本数を反映している。ノード同士を結ぶ線はノード間リンクであり、リンクの本数は常に 1 である。



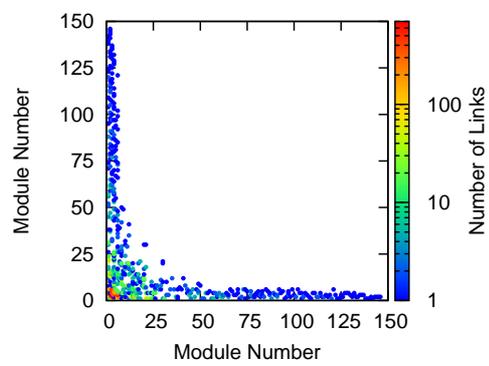
(a) Path1



(b) Path2

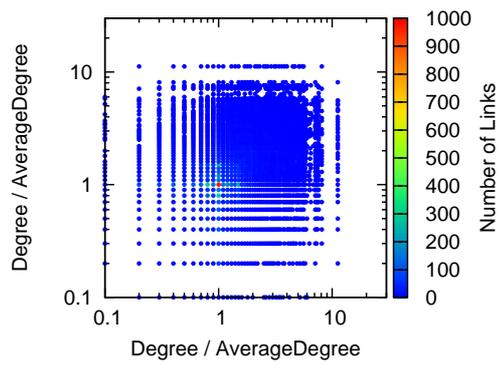


(c) Path3

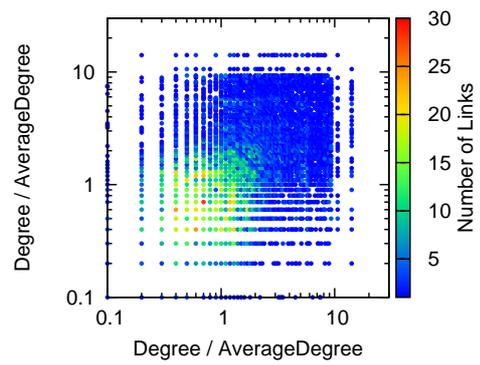


(d) Path4

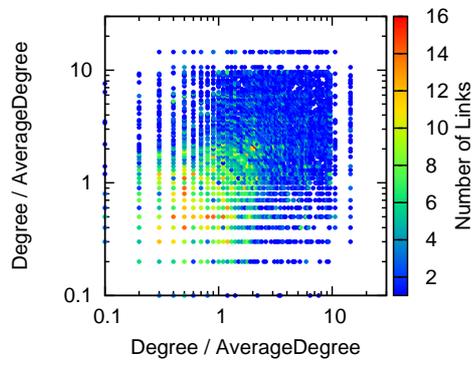
図 11: モジュールサイズとモジュール間リンク数の相関



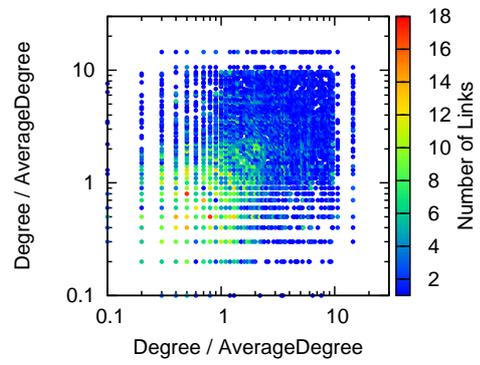
(a) Path1



(b) Path2



(c) Path3



(d) Path4

図 12: モジュール間を接続するノードの次数とリンク数の相関

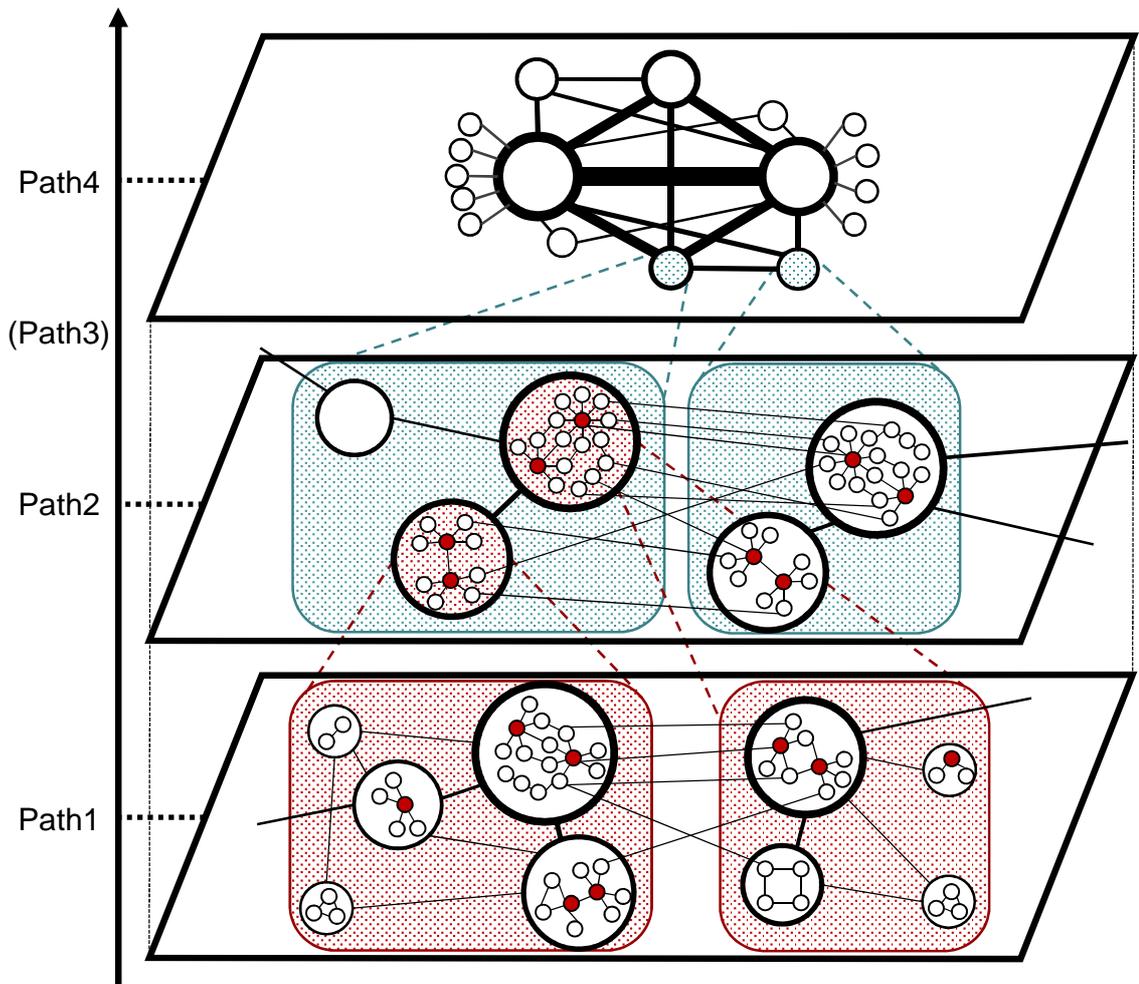


図 13: 脳機能ネットワークトポロジーの概略図

3.3.7 接続構造がもたらす利点の予想

上述した接続構造の分析結果および図 13 から、情報ネットワークへの応用の観点において脳機能ネットワークの接続構造は以下にあげる 3 つの利点を有していると予想できる。

1. モジュール間の接続が多様である

モジュール集約トポロジーが次数分布がべき則に従うスケールフリー性を有していることから、ハブノードを介することで効率の良い通信を行うことができると思われる。また、モジュール集約トポロジーがフラクタル性を有していることから、トポロジーの様々な部分で一定数以上のリンク数が確保されていることが予想できる。この性質は Path1、Path2 のモジュール集約トポロジーに顕著に見られており、小さなモジュールであっても大きなモジュールだけではなく、同程度の大きさのモジュールに対してもリンクを構築しており、トポロジーの様々な部分において経路が存在していることを示唆している。これにより、モジュール間が多様に接続されていると予想できる。

2. 故障がモジュール外部へ波及しない

モジュール内部トポロジーの次数相関が高いことから、モジュール内部のハブノードが故障した場合、そのモジュール内の通信効率の低下は免れない。一方で、モジュール間のリンクは平均的な次数となるノードで多く構築されていることから、他のモジュールのハブノードが故障したとしても、モジュール間の通信に与える影響は少ないことが予想できる。

3. 下位故障での故障が上位階層へ波及しない

上述した 2 つの利点が正しいと仮定すれば、下位階層で大規模な故障が発生しても、故障が発生した同一階層の代替経路を利用することができる、もしくは故障が少数のモジュールに限定して波及されるため、トポロジーの接続性の観点では上位階層に与える影響が非常に少ないことが予想できる。

4 脳機能ネットワークの性能評価

本章では、3.3.7章で述べた接続構造がもたらす利点の予想のうち、モジュール間の経路の多様性について検証を行う。多様性として、特に経路の品質を表すホップ長に着目し、定量的に評価を行う。

4.1 評価対象トポロジー

本報告では、複数のトポロジーにおいてネットワークの性能を比較することで、脳機能ネットワークの接続構造がモジュール間通信の経路の多様性にどのような影響を与えるのかを明らかにする。比較対象として用いるトポロジーは、ランダムモデル、Waxman モデル [25]、WS (Watts-Strogatz) モデル [26] で生成されるトポロジーであり、各 Path のノード数、リンク数が等しいものとする。以下で、比較対象トポロジーの生成モデルについて説明する。

4.1.1 ランダムモデル

与えられたノード集合に対して、任意のノード間に無作為にリンクを構築するモデルである。脳機能ネットワークのモジュール間を無作為に接続する場合に相当する。

トポロジーの生成は、与えられたノード集合に対して指定されたリンク数になるまで無作為にリンクを構築することで行われる。リンクを構築するノードペアによって非連結なトポロジーが生成される可能性があるが、本報告では連結なトポロジーを比較対象とする。

4.1.2 Waxman モデル

与えられたノード集合に対して、ノード間の物理距離が短いほど、そのノードペアに対して優先的にリンクが追加されるモデルである。脳機能ネットワークには、解剖学的に近い位置にある機能モジュールが密に接続されるという特徴があり [4,27]、このモデルはその特徴を反映することができる。

Waxman モデルでは2次元空間に無作為に配置されたノード集合に対して、ノード (u, v) 間を以下の確率 $P(u, v)$ にもとづいて接続する。

$$P(u, v) = \alpha \times \exp\left(-\frac{d(u, v)}{\beta \times L}\right) \quad (6)$$

式(6)において、 $d(u, v)$ はノード u とノード v 間のユークリッド距離、 L は全ノード間距離の最大値である。2次元空間の広さを $HS \times HS$ とすると、 L は $\sqrt{2} \times HS$ で近似できる。 α

と β はそれぞれノード間の接続構造を決定づける変数である。 α はあるノード間距離に対するリンク数を操作するパラメータであり、 α が大きいほどトポロジー全体のリンク数が多くなる。 β はあるノード間距離に対するリンク構築の確率を操作するパラメータであり、 β が小さいほど距離が遠いノード間にリンクが構築される確率が減少する。

上述した生成モデルではトポロジー全体のリンク数がパラメータ α に依存する。しかし、本報告では比較評価のために与えられたリンク数のグラフを生成する必要がある。そこで以下のように修正した生成モデルを使用した。

1. ノードを $[0, 1]^2$ の 2 次元空間にランダムに配置する
2. 目的のリンク数になるまで以下を繰り返す
 - (a) リンクが存在していないノードペア (u, v) をランダムに選択する。
 - (b) 以下の確率に基いて (u, v) 間を接続する。

$$P(u, v) = 1.0 \times \exp\left(-\frac{d(u, v)}{\sqrt{2} \times \beta}\right) \quad (7)$$

3. トポロジーが非連結であれば、リンクを全て削除して (2) に戻る

(2) の処理により、任意のリンク数をもつトポロジーを生成することができる。

本評価では、物理的に近い位置にあるモジュールが密に接続されるという特徴を反映させるために、 β の値を 0.1 に設定した。

4.1.3 WS モデル

与えられたノード集合に対して、隣接ノードを密に接続しつつホップ長を小さく抑えるトポロジーを生成するモデルである。脳機能ネットワークのモジュール間通信の局所的最適化と大域的効率化に相当するモデル、つまり脳機能ネットワークにおける wiring-cost と efficiency のトレードオフの最適化に相当するモデルであるとされている [28]。

WS モデルでは、初期トポロジーとして全ノードをノード間距離が 1 となるように環状に配置し、距離 k 以内にある全てのノードとリンクを構築する。その後、全リンクのうち割合 p のリンクを無作為に選択し、それぞれのリンクに対して一端をノードから切り離して他のノードに接続する処理を繰り返し行うことでトポロジーを生成する。

Waxman モデルと同様に、WS モデルで生成されるトポロジーのリンク数は k に依存するため任意のリンク数をもつトポロジーを生成することはできない。具体的に、ノード数が N のときリンクの数は $N \times k$ で固定される。そこで、初期トポロジーを構築する際に、与

えられたリンク数となるまで距離が近いノード間に順にリンクを構築することで、任意のリンク数をもつトポロジーを生成できる。

初期トポロジーとして各 Path のノード数とリンク数に等しいトポロジーを与え、張替えを行うリンクの割合 p を変化させた時のクラスタリング係数 $C(p)$ と、平均ホップ長 $H(p)$ の変化を図 14 に示す。平均ホップ長は、 $p = 0$ におけるトポロジーの平均ホップ長を用いて正規化を行っている。脳機能ネットワークにおける局所的最適化の度合いをクラスタリング係数、大域的効率化の度合いを平均ホップ長とみなすと、いずれの Path においても $p = 0.10$ 前後で釣り合いが取れていることがわかる。そこで本評価では $p = 0.10$ として得られたトポロジーを用いる。

4.1.4 トポロジーの例

脳機能ネットワークの Path2 のモジュール集約トポロジーと、そのトポロジーとノード数およびリンク数が等しい各モデルにもとづいて生成されるトポロジーの例を図 15 に示す。ノードの色は各トポロジーにおける次数の大小を表しており、次数が大きいほど赤く、次数が小さいほど青くなるように着色している。ノードの位置は使用したグラフ可視化ソフトウェア Gephi [29] のレイアウトアルゴリズムに依存しており、実際のノード配置とは関連がない。

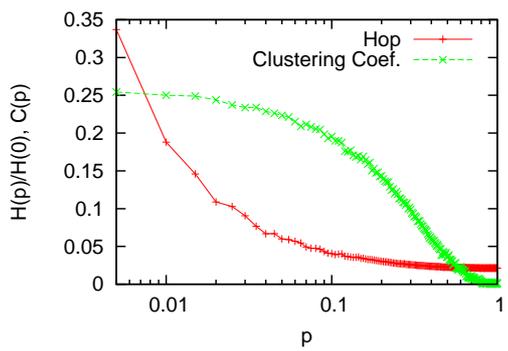
4.2 評価指標

経路の品質についての評価を行うためには、4.1 章に記載したトポロジーに対して任意のノード間の全ての経路のホップ長を求めることが理想であるが、計算時間の関係で不可能である。そこで、任意のノード間について最短経路から順に上位 300 本までのホップ長を求めることとする。ホップ長の導出には文献 [30] の K -最短路法を使用する。

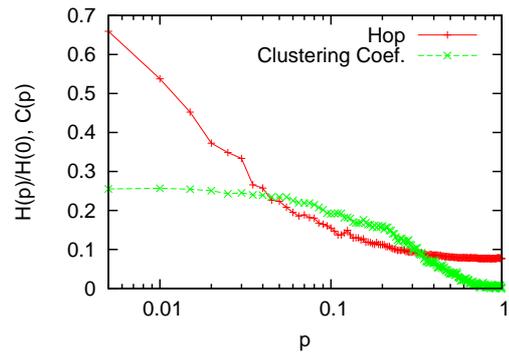
4.3 評価結果

図 16、図 18、図 20、図 22 に、上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均を度数分布として示した。また図 17、図 19、図 21、図 23 に、全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長を度数分布として示した。

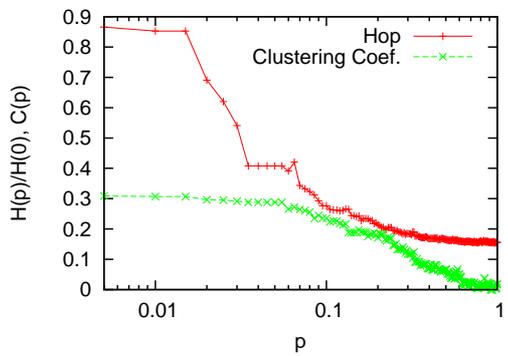
評価結果から、平均ホップ長、全経路のホップ長の分布ともに、いずれの Path においても脳のモジュール集約トポロジーが比較対象トポロジーと比べて値が小さい範囲に集中して分布している。すなわち、脳が品質の良い経路を確保していることがわかる。また平均ホップ長の分布の範囲が集中していることから、最短経路のホップ長と同程度の品質の経路を多



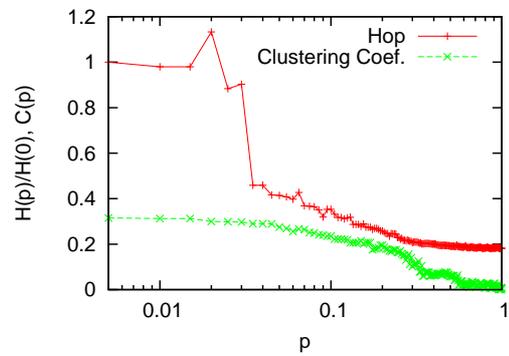
(a) Path1



(b) Path2

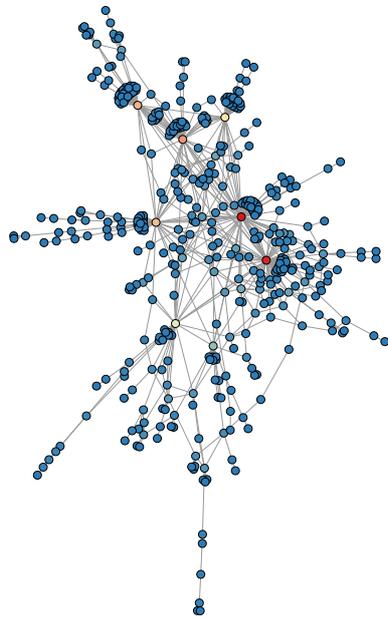


(c) Path3

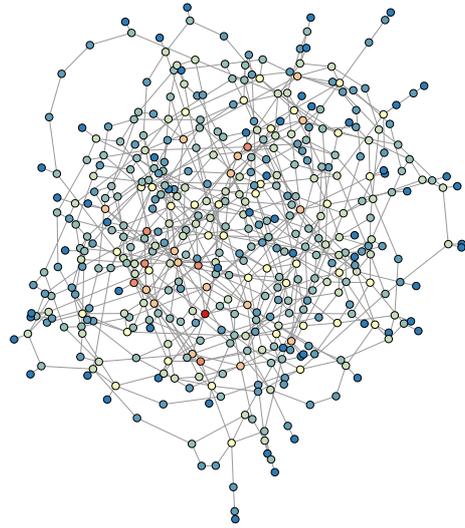


(d) Path4

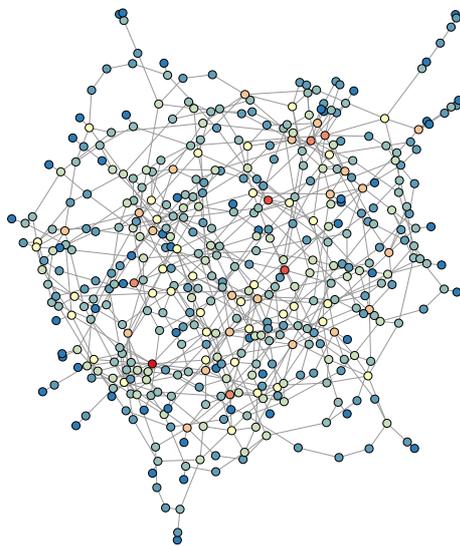
図 14: リンクの張替えの割合 p に対するクラスタリング係数と平均ホップ長 : WS モデル



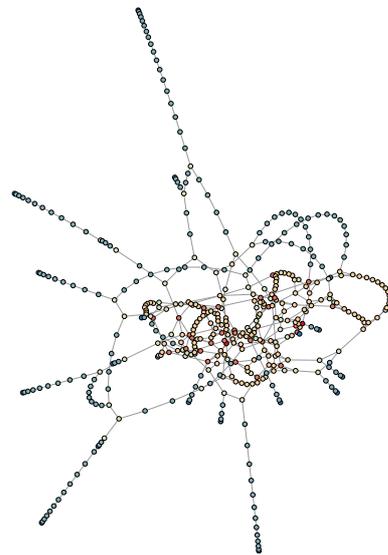
(a) 脳



(b) ランダムモデル



(c) Waxman モデル



(d) WS モデル

図 15: 性能評価に使用するトポロジーの例 (ノード数:432、リンク数:654)

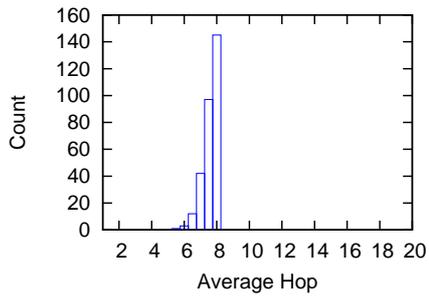
表 4: ホップ長が $H_B(0)$ から $H_B(300)$ の範囲内である経路数の比較

	Random	Waxman	WS
Path1	7	26	48
Path2	14	18	35
Path3	22	19	41
Path4	28	29	55

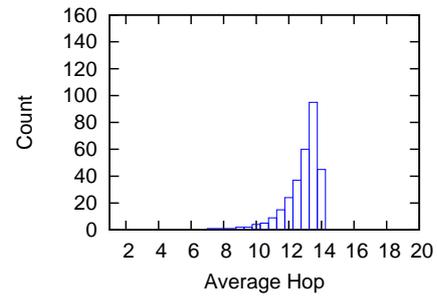
数確保していることがわかる。脳のモジュール集約トポロジーの K 番目の経路の平均ホップ長を $H_B(K)$ としたときに、比較対象トポロジーに対してホップ長が $H_B(0)$ から $H_B(300)$ の範囲内である経路の数を求めると、表 4 のようになり、最も経路数が多い WS モデルと比較しても 5 倍以上多くの良質な経路数を確保できていることがわかる。

4.4 高品質インターネット構築に関する考察

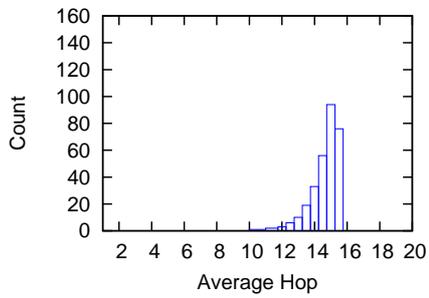
4.3 章で得られた結果は、モジュール間を無作為に接続する場合、近いモジュール間を接続する場合、リンクコストと効率のトレードオフを最適化するようにモジュール間を接続する場合のいずれの場合よりも、脳機能ネットワーク独自のモジュール間の接続構造が優れていることを示している。このことから、脳機能ネットワークの接続構造を有するインターネットを構築した際に、既存のトポロジーよりも高品質なインターネットを構築できることが予想できる。ただし、平均ホップ長をより短くすること、つまり経路の品質そのものを改善することは難しいと考えられる。なぜなら、ノード数が 22190、リンク数が 47993 である 2006 年のインターネットの AS レベルトポロジーにおける最短経路の平均ホップ長を算出したところ 3.818 という値が得られたが、それよりもネットワークの規模が小さい脳機能ネットワークの Path1 のモジュール集約トポロジーにおける最短経路の平均ホップの値が 5.682 となったためである。ここからインターネットの AS レベルトポロジーは既に経路の品質は十分高いことがわかる。そこで、脳機能ネットワークの接続構造をインターネットに適用した際には、良質な経路の数が増加するという点で高品質なインターネットを構築できるのでは無いかと期待している。



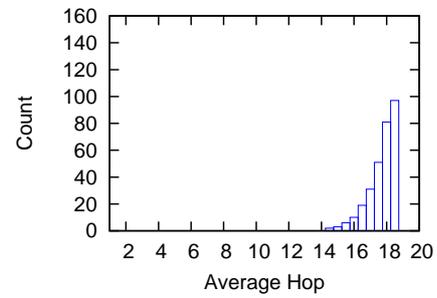
(a) 脳



(b) ランダムモデル

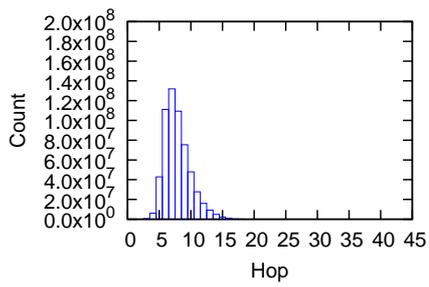


(c) Waxman モデル

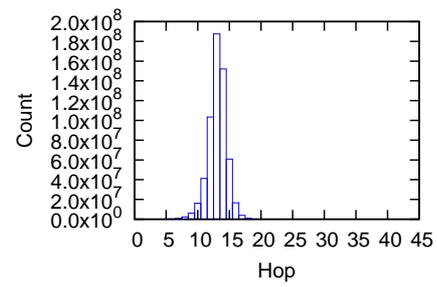


(d) WS モデル

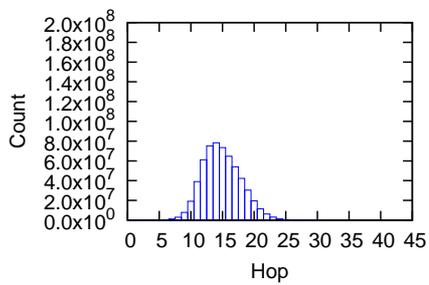
図 16: 上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path1



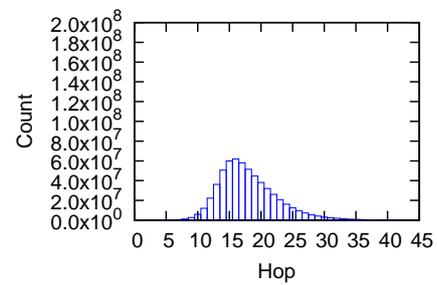
(a) 脳



(b) ランダムモデル

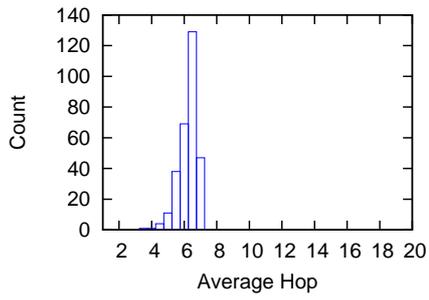


(c) Waxman モデル

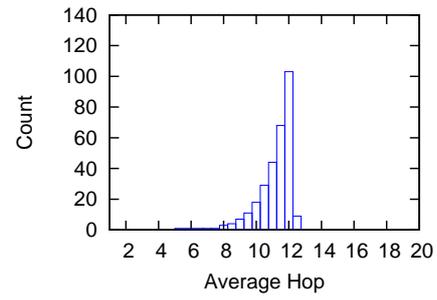


(d) WS モデル

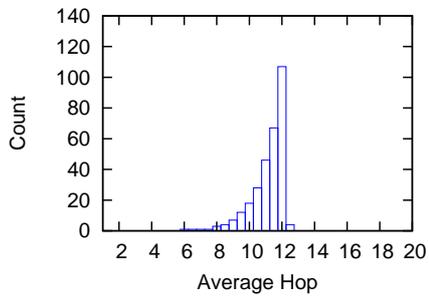
図 17: 全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path1



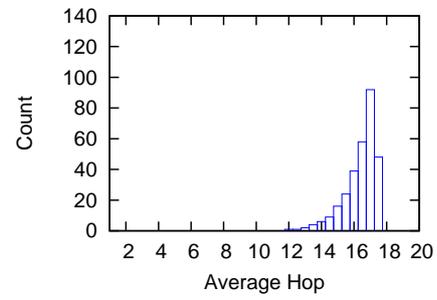
(a) 脳



(b) ランダムモデル

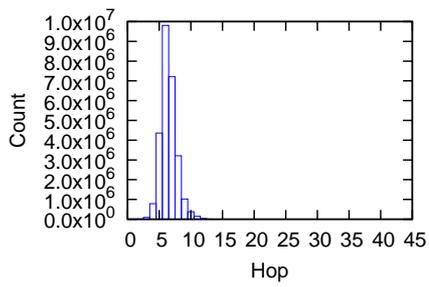


(c) Waxman モデル

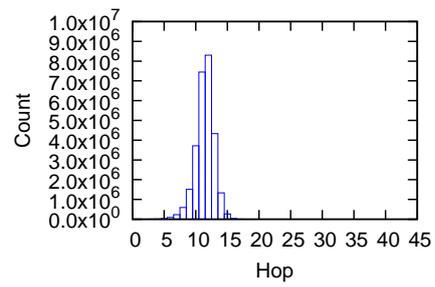


(d) WS モデル

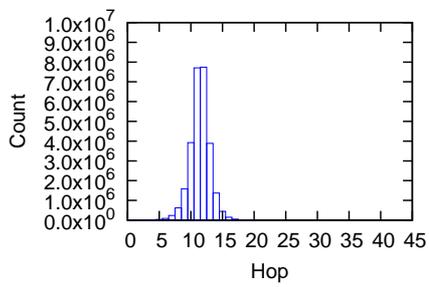
図 18: 上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path2



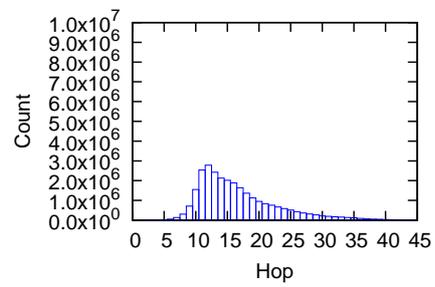
(a) 脳



(b) ランダムモデル

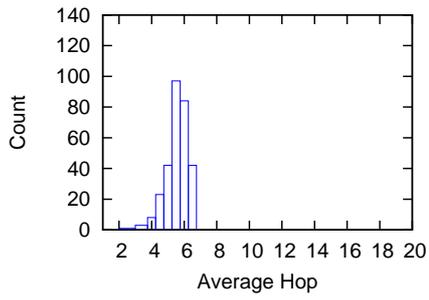


(c) Waxman モデル

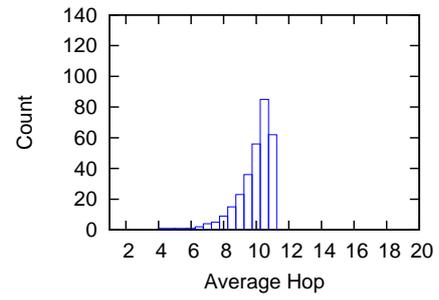


(d) WS モデル

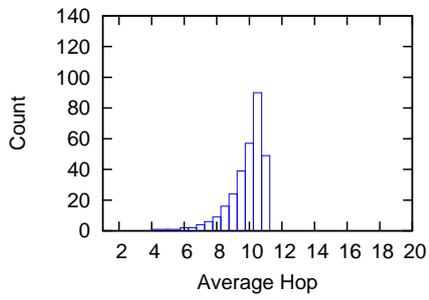
図 19: 全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path2



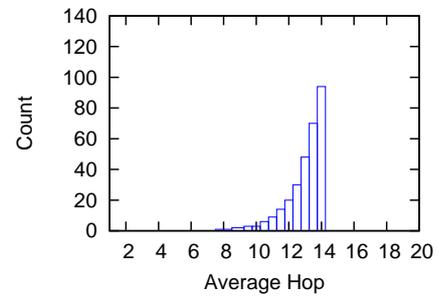
(a) 脳



(b) ランダムモデル

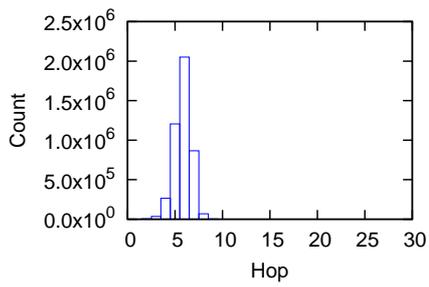


(c) Waxman モデル

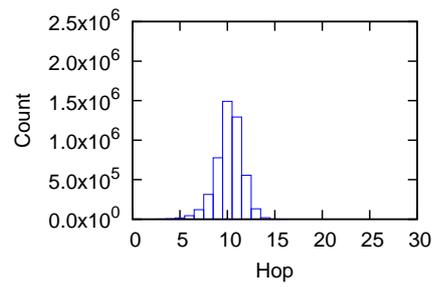


(d) WS モデル

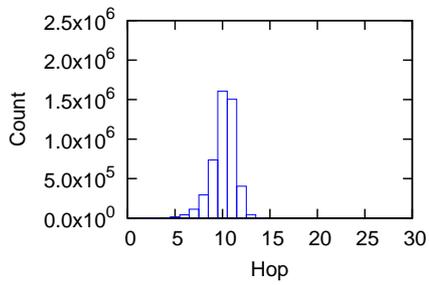
図 20: 上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path3



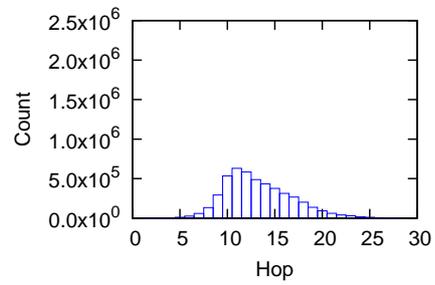
(a) 脳



(b) ランダムモデル

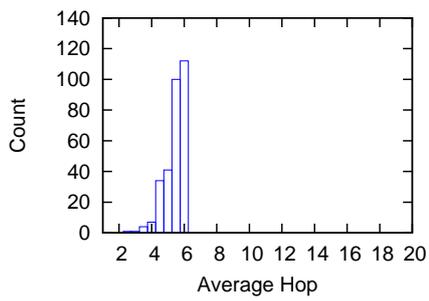


(c) Waxman モデル

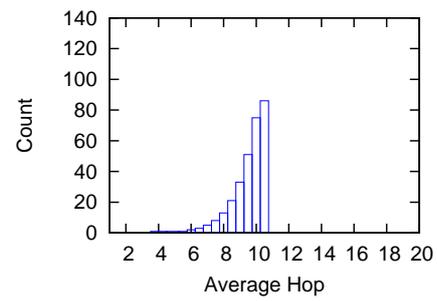


(d) WS モデル

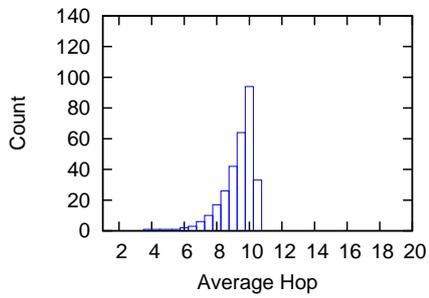
図 21: 全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path3



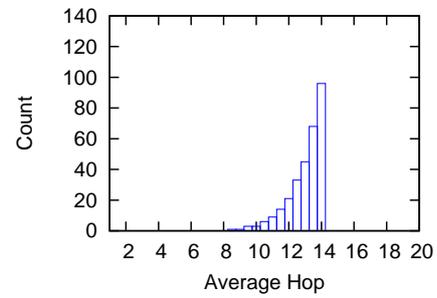
(a) 脳



(b) ランダムモデル

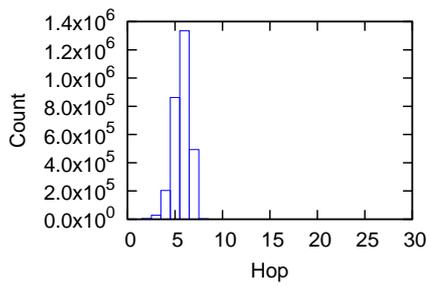


(c) Waxman モデル

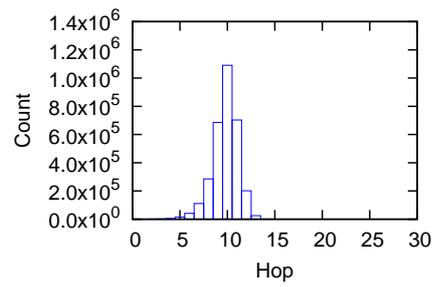


(d) WS モデル

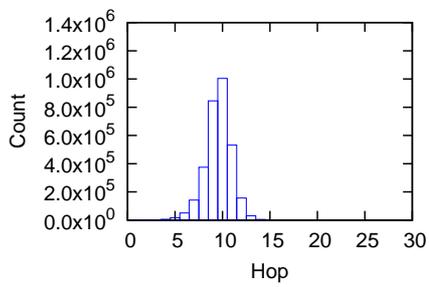
図 22: 上位 K 番目の最短経路のホップ長の平均 - Path4



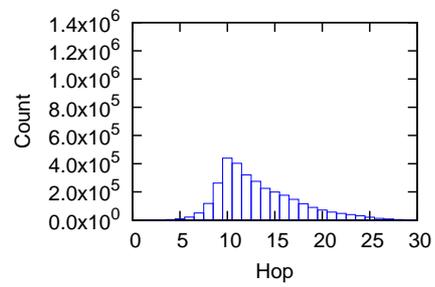
(a) 脳



(b) ランダムモデル



(c) Waxman モデル



(d) WS モデル

図 23: 全ノード間における上位 K 番目までの全ての最短経路のホップ長 - Path4

5 おわりに

本報告では、インターネット高品質化への手がかりとしてヒトの脳機能ネットワークに着目し、接続構造の分析と性能評価を行った。接続構造の分析の結果、モジュールによる集約を行ったトポロジーはフラクタル性を有すること、ノードの次数分布がべき則に従うこと、次数が低いノードと次数が高いノードが接続される傾向にあることが明らかになった。モジュール内部のトポロジーはノードの次数分布がべき則に従うこと、次数が高いノード同士、次数が低いノード同士が接続される傾向にあることが明らかになった。またモジュール間を接続するリンクは、各モジュールの平均的な次数を持つノード間に多く構築されており、大きなモジュールは様々なモジュールと多数のリンクを構築すること、小さなモジュールは大きなモジュールと優先的にリンクを構築することが明らかになった。性能評価の結果、機能モジュールレベルのトポロジーにおいて、比較対象トポロジーと比べて5倍以上多くの良質な経路を確保していることがわかった。このことから、インターネットに対して脳機能ネットワークの接続構造を適用した際に良質な経路が増加する見通しを得た。

今後の課題として、3.3.7章に述べた利点のうち検証を行っていないものに対する追加検証を行う予定である。

謝辞

本報告を終えるにあたり、御多忙の中、熱心に御指導、御教授を頂きました大阪大学情報科学研究科の村田正幸教授に深く感謝いたします。また、本報告の作成にあたり直接御指導頂きました大阪大学情報科学研究科の荒川伸一准教授には、様々な面で常に適切な御指導を頂きましたことを、心より御礼申し上げます。また、平素から適切な御助言を頂きました大阪大学情報科学研究科の大下裕一助教、大阪大学経済学研究科の小南大智助教に感謝いたします。加えて、日頃から親身に相談に乗っていただき、様々な助言をいただきました中田侑氏、シン・ルー氏、水元宏治氏、下間雄太氏、豊永慎也氏、竹下結花氏に心より感謝いたします。最後に、本報告の作成にあたり精神的に支えを頂きました村田研究室の皆様、基礎工学部情報科学科の親友、家族に厚く感謝の意を表して謝辞と致します。

参考文献

- [1] L. Gao, “On Inferring Autonomous System Relationships in the Internet,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 9, pp. 733–745, Dec. 2001.
- [2] S. Kitazawa, “Understanding the network for brain functions.” <http://www6.ocn.ne.jp/~seisan/643/643-66.pdf>, 2012.
- [3] O. Sporns, D. R. Chialvo, M. Kaiser, and C. C. Hilgetag, “Organization, development and function of complex brain networks,” *Trends in Cognitive Sciences*, vol. 8, pp. 416–425, Sept. 2004.
- [4] E. Bullmore and O. Sporns, “The economy of brain network organization,” *Nature Reviews Neuroscience*, vol. 13, pp. 336–349, Apr. 2012.
- [5] J. K. Rilling, “Comparative primate neuroimaging: insights into human brain evolution ,” *Trends in Cognitive Sciences*, vol. 18, pp. 46–55, Jan. 2014.
- [6] R. A. Poldrack, J. Clark, E. J. PareBlagoev, D. Shohamy, J. C. Moyano, C. Myers, and M. A. Gluck, “Interactive memory systems in the human brain,” *Nature*, vol. 414, pp. 546–549, Nov. 2001.
- [7] M. Posner, S. Petersen, P. Fox, and M. Raichle, “Localization of cognitive operations in the human brain,” *Science*, vol. 240, pp. 1627–1631, June 1988.
- [8] V. M. Eguiluz, D. R. Chialvo, G. A. Cecchi, M. Baliki, and V. V. Apkarian, “Scale-free brain functional networks,” *Physical Review Letters*, vol. 94, pp. 1–4, Jan. 2005.
- [9] S. Achard, R. Salvador, B. Whitcher, J. Suckling, and E. Bullmore, “A resilient, low-frequency, small-world human brain functional network with highly connected association cortical hubs,” *The Journal of Neuroscience*, vol. 26, pp. 63–72, Jan. 2006.
- [10] D. Meunier, R. Lambiotte, and E. T. Bullmore, “Modular and hierarchically modular organization of brain networks,” *Frontiers in Neuroscience*, vol. 4, pp. 1–11, Dec. 2010.

- [11] D. S. Bassett, D. L. Greenfield, A. Meyer-Lindenberg, D. R. Weinberger, S. W. Moore, and E. T. Bullmore, “Efficient physical embedding of topologically complex information processing networks in brains and computer circuits,” *PLOS Computational Biology*, vol. 6, pp. 1–14, Apr. 2010.
- [12] D. S. Bassett, E. Bullmore, B. A. Verchinski, V. S. Mattay, D. R. Weinberger, and A. Meyer-Lindenberg, “Hierarchical organization of human cortical networks in health and schizophrenia,” *The Journal of Neuroscience*, vol. 28, pp. 9239–9248, Sept. 2008.
- [13] L. K. Gallos, H. A. Makse, and M. Sigman, “A small world of weak ties provides optimal global integration of self-similar modules in functional brain networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 109, pp. 2825–2830, Feb. 2012.
- [14] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos, “On power-law relationships of the internet topology,” *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, vol. 29, pp. 251–262, Aug. 1999.
- [15] S. Jin and A. Bestavros, “Small-world characteristics of internet topologies and implications on multicast scaling,” *Computer Networks*, vol. 50, pp. 648–666, Apr. 2006.
- [16] C. Song, S. Havlin, and H. Makse, “Origins of fractality in the growth of complex networks,” *Nature Physics*, vol. 2, pp. 275–281, Apr. 2006.
- [17] C. Song, S. Havlin, and H. Makse, “Self-similarity of complex networks,” *Nature*, vol. 433, pp. 392–395, Jan. 2005.
- [18] E. Fernández and H. F. Jelinek, “Use of fractal theory in neuroscience: Methods, advantages, and potential problems,” *Methods*, vol. 24, pp. 309–321, Aug. 2001.
- [19] K.-I. Goh, G. Salvi, B. Kahng, and D. Kim, “Skeleton and fractal scaling in complex networks,” *Physical Review Letters*, vol. 96, pp. 1–4, Jan. 2006.
- [20] E. Bullmore and O. Sporns, “Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems,” *Nature Reviews Neuroscience*, vol. 10, pp. 186–198, Mar. 2009.
- [21] D. Meunier, R. Lambiotte, A. Fornito, K. Ersche, and E. T. Bullmore, “Hierarchical modularity in human brain functional networks,” *Frontiers in Neuroinformatics*, vol. 3, pp. 1–12, Oct. 2009.

- [22] V. Blondel, J. Guillaume, R. Lambiotte, and E. Mech, “Fast unfolding of communities in large networks,” *Journal of Statistical Mechanics*, pp. 1–12, July 2008.
- [23] C. Song, L. K. Gallos, S. Havlin, and H. Makse, “How to calculate the fractal dimension of a complex network: the box covering algorithm,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2007, pp. 1–16, Mar. 2007.
- [24] L. Li, D. Alderson, W. Willinger, and J. Doyle, “A first-principles approach to understanding the internet’s router-level topology,” *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, vol. 34, pp. 3–14, Aug. 2004.
- [25] B. M. Waxman, “Routing of Multipoint Connections,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 6, pp. 1617–1622, Dec. 1988.
- [26] D. Watts and S. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *Nature*, vol. 393, pp. 440–442, June 1998.
- [27] A. F. Alexander-Bloch, P. E. Vértes, R. Stidd, F. Lalonde, L. Clasen, J. Rapoport, J. Giedd, E. T. Bullmore, and N. Gogtay, “The Anatomical Distance of Functional Connections Predicts Brain Network Topology in Health and Schizophrenia,” *Cerebral Cortex*, vol. 23, pp. 127–138, Jan. 2012.
- [28] M. P. van den Heuvel, C. J. Stam, R. S. Kahn, and H. E. Hulshoff Pol, “Efficiency of Functional Brain Networks and Intellectual Performance,” *The Journal of Neuroscience*, vol. 29, pp. 7619–7624, June 2009.
- [29] “Gephi, an open source graph visualization and manipulation software.” <https://gephi.org/>.
- [30] J. Y. Yen, “Finding the K Shortest Loopless Paths in a Network,” *Management Science*, vol. 17, pp. 712–716, July 1971.